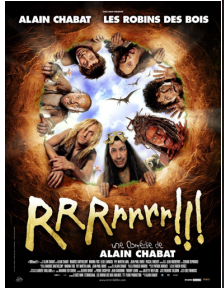


Infos: retour sur l'examen blanc

- Exercice à rendre pour lundi prochain.
- Ressources pour révisions



$$f \text{ dérivable en } x_0 \text{ ssi } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

règles de calcul

⚠ $f \xrightarrow{\text{règles de calcul}} f' \rightarrow f'(x_0)$ (lycée / collège glycérine)

$f \xrightarrow{\text{limite du quotient}} f'(x_0) \xrightarrow{\text{quelconque}} f'$ (correct.)

Quand est-ce qu'on peut utiliser les règles de calcul ?
 Sur les régions convexes quand
 quand l'expression de f ne change pas

limite du quotient / x_0 quelconque
 différentiel

Proposition 6.5
 $c \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}^*$

$a \in \mathbb{R}^*$ $0 = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leftarrow$

$$e^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$$

D	$f(x)$	$f'(x)$
$\mathbb{R}$	c	0
$\mathbb{R}$	x^n	nx^{n-1}
$\mathbb{R}$	$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\mathbb{R}$	$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} [$	$\tan(x)$	$\frac{1}{\cos^2(x)}$
$\mathbb{R}$	e^x	e^x
$\mathbb{R}$	$\cosh(x)$	$\sinh(x)$
$\mathbb{R}$	$\sinh(x)$	$\cosh(x)$
$] -1, 1 [$	$\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$] -1, 1 [$	$\arccos(x)$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\mathbb{R}$	$\arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\mathbb{R}^*$	$\log x $	$\frac{1}{x}$
$]0, +\infty [$	x^a	ax^{a-1}

$\rightarrow$ faire un exemple
 $\rightarrow$ idem que sin

$= 1 + \tan^2(x)$

$\rightarrow$ prop

$\rightarrow + e^x$

$\rightarrow$ fait

$\rightarrow$ idem

$\rightarrow$ idem

$\rightarrow e^{\log|x|}$

$\rightarrow x^a = e^{a \log(x)}$

Définition 6.6

Soient $x_0 \in D \subseteq \mathbb{R}$, $f: D \rightarrow \mathbb{R}$.

(i) Supposons que f est définie à droite de x_0 . On dit que f est dérivable à droite en x_0 si

$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existe. On note alors cette limite $f'_d(x_0)$

(ii) Supposons que f est définie à gauche de x_0 . On dit que

f est dérivable à gauche en x_0 si

$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existe. On note alors cette limite $f'_g(x_0)$

(iii) Supposons $D = [a, b]$, avec $a < b$. On dit que f est dérivable si $\forall x_0 \in]a, b[$, f est dérivable en x_0 , f est dérivable à droite en a et à gauche en b .

(iv) Supposons que $D = [a, +\infty[$. On dit que f est dérivable si $\forall x_0 \in]a, +\infty[$, f est dérivable en x_0 , et f est dérivable à droite en a .

(v) Supposons que $D =]-\infty, b]$. On dit que f est dérivable si $\forall x_0 \in]-\infty, b[$, f est dérivable en x_0 et f est dérivable à gauche en b .

Remarque 6.7 :

On a que f est dérivable en x_0 si et seulement si f est dérivable à gauche & à droite en x_0 et

$$f'_g(x_0) = f'_d(x_0)$$

Exemples 6.8:

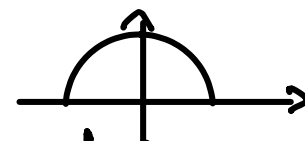
(i) Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $|x|$. On a vu que f n'est pas dérivable en 0. Néanmoins, on a

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x} = 1$$

$$\Rightarrow f'_g(0) = -1, \quad f'_d(0) = 1 \quad (\Rightarrow f \text{ pas dérivable en } 0)$$

(ii) Soit $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sqrt{1-x^2}$



f dérivable sur $[-1, 1]$? $\forall x_0 \in]-1, 1[$ on peut dériver comme combinaison de fonctions dérivables.

$$x_0 = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{\sqrt{1-x^2} - 0}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{\sqrt{1+x} \sqrt{1-x}}{x + 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}} = +\infty \quad \left(\frac{\neq 0, > 0}{0, > 0} \right)$$

$\Rightarrow$ f pas dérivable à droite en -1 .

Similairement, f pas dérivable à gauche en 1 .

§6.2 Continuité de la dérivée & dérivées d'ordre supérieur

Définition 6.10 :

Soit $D \subseteq \mathbb{R}$ un ouvert, $n \in \mathbb{N}^*$ et $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable.

(i) Si $f': D \rightarrow \mathbb{R}$ est continue, on dit que f est continuellement dérivable ou f est de classe C^1 . On définit l'espace des fonctions continuellement dérivables par

$$\begin{aligned} C^1(D) &= \{ g \in C^0(D) : g \text{ est continuellement dérivable} \} \\ &= \{ g \in C^0(D) : g \text{ est dérivable et } g' \in C^0(D) \} \end{aligned}$$

(ii) Si f et f' sont continuellement dérivables, on dit que f est 2 fois continuellement dérivable ou f est de classe C^2 .
On note

$$C^2(D) = \{g \in C^1(D) : g \text{ est 2x contin. dérivable}\} \\ = \{g \in C^1(D) : g' \in C^1(D)\}$$

(iii) On continue ainsi, si la dérivée d'ordre k de f qu'on note $f^{(k)}$ ($f' = f^{(1)}, f'' = f^{(2)}, \dots, f^{(k)}$) est continuellement dérivable pour $k = 1, 2, 3, \dots, n-1$, on dit que f est n fois continuellement dérivable ou f est de classe C^n .

On note

$$C^n(D) = \{g \in C^{n-1}(D) : g^{(n-1)} \in C^1(D)\}$$

(iv) $C^\infty(D) = \bigcap_{k=1}^{+\infty} C^k(D)$. Si $f \in C^\infty(D)$, on dit que f est

infinitement dérivable ou f est ch classe C^∞

Exemple 6.11

(i) Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x \cdot |x|$.

On a $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 2|x|$ qui est continue, $\Rightarrow f \in C^1(\mathbb{R})$
 $f \in C^2$?

f' dérivable? non, $|x|$ n'est pas dérivable en 0.
 $\Rightarrow f \notin C^2$.

Plus généralement, $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = x^n |x|$.
 $f_n \in C^n(\mathbb{R}) \setminus C^{n+1}(\mathbb{R})$.

(ii) Soit $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x |x|$. Alors, $f'(x) = 2|x|$
et $f''(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x > 0 \\ -2 & \text{si } x < 0 \end{cases}$ qui est continue sur $\mathbb{R}^*$
 $f'''(x) = 0, \Rightarrow f^{(k)}(x) = 0$ pour $k \geq 3 \Rightarrow f \in C^\infty(\mathbb{R}^*)$

Théorème 6.12 :

Soit $D \subseteq \mathbb{R}$ un ouvert, $x_0 \in D$, $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Supposons que
(i) f est dérivable sur $D \setminus \{x_0\}$, i.e. $\forall x \in D \setminus \{x_0\}$, f est dérivable en x .

(ii) la limite $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x)$ existe.

Alors, f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f'(x)$.

Remarque 6.13

On vu dans la remarque 5.4 que si une fonction f est discontinue en x_0 , il y a 2 possibilités: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ n'existe pas ou $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ existe mais est différent de $f(x_0)$

Le théorème élimine la deuxième possibilité pour f'
 $\Rightarrow f$ dérivable, $f \notin C^1 \Rightarrow \exists x_0$ tq $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x)$ n'existe pas.

Exemple 6.14

Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Alors, f est dérivable. Pour $x \in \mathbb{R}^*$, $f'(x) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$

Pour $x = 0$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 \sin\left(\frac{1}{h}\right) - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} h \sin\left(\frac{1}{h}\right) = 0$$

$\Rightarrow f$ est dérivable et $f'(x) = \begin{cases} 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

Vu que $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ n'existe pas

$\Rightarrow f' \notin C^0 \Rightarrow f \notin C^1$

Exemple 6.14 1/2 (exemple 6.9) Dérivabilité de fonctions définies par étapes.

$$f(x) \begin{cases} h(x) & \text{si } x > x_0 \\ g(x) & \text{si } x \leq x_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} h(x) & \text{si } x \neq x_0 \\ c & \text{si } x = x_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} h(x) & \text{si } x > x_0 \\ c & \text{si } x = x_0 \\ g(x) & \text{si } x < x_0. \end{cases}$$

Dérivabilité en x_0 ? 2 options:

$$1) \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \stackrel{?}{=} \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \stackrel{?}{=} \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \stackrel{?}{=} f(x_0) \quad (\Rightarrow f \text{ est continue en } x_0)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f'(x) \stackrel{?}{=} \lim_{x \rightarrow x_0^+} f'(x) \quad (\stackrel{\text{Thm 6.12}}{\Rightarrow} f \text{ est dérivable en } x_0)$$

(iv) soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \begin{cases} \cos(ax) & \text{si } x < 0 \\ b & \text{si } x = 0 \\ cx + b & \text{si } x > 0 \end{cases}$
Pour quels paramètres f est dérivable?

(Déterminer paramètres $\rightarrow$ généralement, option 2 est meilleure)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (cx + b) = b, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \cos(ax) = \cos(0) = 1$$

$$f(0) = b \quad \Rightarrow \quad b = 1 = b \quad (b = 1 \Leftrightarrow f \text{ est continue})$$

$$\text{pour } x < 0, \quad f'(x) = -a \cdot \sin(ax) \rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} -a \cdot \sin(ax) = -a \cdot \sin(0) = 0$$

$$\text{pour } x > 0, \quad f'(x) = c \rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = c$$

$$\Rightarrow c = 0 \quad (f \text{ dérivable ssi } c = 0 \text{ \& } b = 1)$$

$$(5) \quad f(x) = \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

option 1

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right) \text{ qui}$$

n'existe pas. $\Rightarrow$ f n'est pas dérivable.

Choix des options:

- 1) si
 - on ne s'intéresse pas à la continuité
 - pas de paramètre,
 - f' est atroce pour $x \neq x_0$
- 2) tous les autres cas.

§6.3 Existence, continuité et dérivabilité de la fonction réciproque

Proposition 6.15

Soit $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalle, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Alors, f est injective si et seulement si elle est strictement monotone

Théorème 6.16

Soit $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalle, $f: I \rightarrow \text{Im}(f)$ une fonction continue et bijective. Alors, $f^{-1}: \text{Im}(f) \rightarrow I$ est continue